

Expérience française de balance du watt: composantes d'incertitude associées à l'étalon de masse pour la détermination de la constante de Planck

Patrick Pinot^{1,a}, Patrick Espel², Matthieu Thomas², Djamel Ziane², François Piquemal²

¹Conservatoire national des arts et métiers, Laboratoire commun de métrologie, 61 rue du Landy 93210 La Plaine Saint-Denis, France

²Laboratoire national de métrologie et d'essais, Laboratoire commun de métrologie, 29 avenue Roger Hennequin 78197 Trappes cedex, France

Abstract. The Planck constant h was determined in 2014 by means of the French watt balance experiment at the LNE (Trappes). The relative standard uncertainty was 3.1×10^{-7} . This first French determination was performed in air with a 500 g mass standard made from a Co-based superalloy. The two main corrections are the buoyancy correction of the order of 66 mg, and the magnetic interaction correction of about 37 μ g. This interaction force appears between the mass artifact and the residual magnetic field coming from the permanent magnet used in the experiment. The main uncertainty components associated with the mass are the calibration uncertainty, the stability uncertainty, the buoyancy correction uncertainty and the magnetic interaction correction uncertainty. The combined uncertainty component due to the mass is about 36 μ g, *i.e.* 7.2×10^{-8} in relative value.

1 Introduction

L'expérience de la balance du watt repose sur un principe de puissance virtuelle permettant de comparer indirectement une puissance mécanique et une puissance électrique. L'idée a été proposée en 1975 par l'anglais B.P. Kibble [1]. L'expérience se déroule en deux phases :

- l'une, dite statique, dans laquelle un conducteur de longueur l parcouru par un courant I est placé dans un champ d'induction B homogène de telle sorte que la force de Laplace F_e s'exerçant sur celui-ci soit verticale. Le courant I est ajusté pour que la force sur le conducteur, suspendu à un fléau de balance, équilibre le poids P d'une masse m soumise à l'accélération de la pesanteur g . Moyennant des hypothèses d'orthogonalité et de configuration géométrique parfaite, l'équilibre de la balance se traduit par l'équation :

$$P = F_e \quad \text{ou encore} \quad mg = BlI \quad (1)$$

- la seconde phase est dite dynamique. Pour déterminer expérimentalement le produit Bl avec l'exactitude recherchée, elle consiste à déplacer à vitesse v , le même conducteur en boucle ouverte dans le même champ magnétique B suivant une trajectoire verticale. L'expérience requiert seulement l'invariance de l'induction B , de la longueur l du conducteur pendant le temps de la mesure et de la position relative de la bobine par rapport au champ d'induction. En posant là encore des hypothèses d'orthogonalité et de configuration géométrique parfaite, la force électromotrice induite U aux bornes du conducteur s'écrit :

$$U = vBl \quad (2)$$

De cette expression, on déduit que le produit Bl équivaut à U/v . Par substitution dans l'équation (1), on arrive à

^a patrick.pinot@cnam.fr

une équation d'égalité entre puissance mécanique et puissance électrique :

$$mgv = UI \quad (3)$$

Le premier terme de l'égalité représente une puissance mécanique, le second une puissance électrique. Le courant I est mesuré par la différence de potentiel V qu'il provoque aux bornes d'une résistance R . L'expression (3) peut alors s'écrire :

$$mgv = UV/R \quad (4)$$

Les tensions V et U sont déterminées par comparaison à une tension de référence U_J délivrée par un étalon à effet Josephson et la résistance R par comparaison à une résistance R_H d'un étalon quantique de résistance basé sur l'effet Hall quantique. Ces deux effets quantiques macroscopiques permettent de rattacher les valeurs de tension et de résistance électriques à deux constantes : la constante de Josephson K_J et la constante de von Klitzing R_K qui sont reliées à la constante de Planck h et à la charge élémentaire e par les deux relations théoriques $K_J = 2e/h$ et $R_K = h/e^2$. Ces relations appliquées à l'expression de la puissance électrique permettent d'éliminer e , ne laissant apparaître que la constante de Planck h facteur d'un paramètre A expérimental [2] :

$$mgv = Ah/4 \quad (5)$$

Depuis 2002, la France développe une expérience de balance du watt, installée au Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE Trappes). L'étalon de masse m choisi pour l'expérience a une masse nominale de 500 g. Une première détermination dans l'air de h au moyen de l'expérience française a été réalisée en 2014 [3]. Cette mesure a été effectuée avec un étalon de masse en superalliage de cobalt (commerciallement dénommé Alacrite XSH), poli et ajusté au Conservatoire national

des arts et métiers (CNAM) dans les années 1980. La valeur de h extraite des données obtenues avec cette expérience et son incertitude-type associée sont :

$$h = 6,626\ 068\ 8(20) \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

Ce qui correspond à une incertitude type relative de $3,1 \times 10^{-7}$.

Les différentes composantes d'incertitude associées à cet étalon sont discutées dans ce papier.

2 Étalon de masse

2.1 Artefacts pour l'expérience française

Bien que l'expérience française soit mécaniquement dimensionnée pour recevoir des étalons de masse de 1 kg, les éléments électriques tels que la source de courant ont été conçus pour une charge maximum correspondant à une masse de 500 g.

Afin de valider le montage expérimental et donner une première mesure de h dans l'air, les seuls étalons de 500 g disponibles ayant les principales caractéristiques requises et hors de la chaîne nationale des masses étaient deux artefacts n°07 et n°08 en Alacrite XSH, polis et ajustés au CNAM dans les années 1980.

Ils sont faits d'un superalliage à base de cobalt fabriqué par la société française Aubert & Duval. Ce superalliage est hyperefforté et forgé à chaud sous vide ; il est constitué de cobalt (55%), de chrome (20%), de tungstène (15%) et de nickel (10%). Ces étalons ont une forme cylindrique telle que leur hauteur soit égale à leur diamètre (≈ 40 mm).

La stabilité des étalons de masse dépend fortement de leur état de surface en termes de surface active, de leurs conditions de conservation (ils sont généralement conservés dans l'air pour une raison pratique de traçabilité) et de la méthode de nettoyage qui leur est appliquée. Les contaminants d'une surface métallique sont d'origine et de nature très diverses. Il est donc essentiel pour la stabilité d'un étalon de masse que sa surface soit la plus lisse possible. On cherche lors de la finition de surface à atteindre un poli « miroir ». Pour obtenir une telle qualité de surface, le processus de polissage n'est pas qu'une simple recette à suivre pas à pas. Il demande de la part de l'opérateur une pratique entretenue et un savoir-faire acquis après de nombreux essais [4]. Ainsi, on a pu obtenir une rugosité quadratique moyenne R_q généralement inférieure à 10 nm sur les étalons en Alacrite XSH.

Il a été montré également que la stabilité de masse des artefacts en Alacrite XSH étudiée durant de nombreuses années est équivalente à celle des meilleurs étalons en platine iridié tant qu'aucune méthode de nettoyage n'est appliquée [5].

Il n'est pas envisagé d'utiliser sous vide ce type d'artefact pour la mesure de h . En particulier cela nécessiterait de faire des études spécifiques pour déterminer la variation de masse lors du passage air/vide comme cela a été réalisé pour les artefacts en acier inoxydable, en platine iridié et en silicium [6].

Bien que la susceptibilité magnétique de l'Alacrite XSH soit assez élevée, ce point n'est pas le plus pénalisant pour valider l'expérience et réaliser une première mesure de h dans l'air. Il est à noter que plusieurs matériaux tels que des alliages à base d'or, de cuivre ou de platine iridié présentent une susceptibilité magnétique plus faible [7-9]. Par exemple celle de l'alliage Pt-10%Ir est presque 10 fois plus faible que celle de l'Alacrite XSH.

2.2 Principales caractéristiques

Pour les besoins de la métrologie des masses, les artefacts utilisés comme étalons de masse doivent posséder des propriétés physiques et chimiques particulières afin de présenter la meilleure stabilité possible en termes de masse [10, 11].

Le superalliage à base de cobalt (Alacrite XSH) présente :

- une dureté de 280 Hv suffisamment élevée pour faciliter son polissage et réduire les risques de dommage lors de la manipulation de l'artefact ;
- une masse volumique d'environ 9150 kg m^{-3} supérieure à l'acier inoxydable donnant un volume et une surface active acceptables en termes de poussée de l'air et de sorption ;
- une bonne homogénéité structurale sans porosité, cavité ou gaz occlus réduisant les échanges de matière entre le matériau et son environnement ;
- une bonne conductivité électrique permettant d'éliminer facilement les charges électrostatiques ;
- une bonne conductivité thermique pour minimiser l'effet des variations de température de l'air pendant les pesées ;
- une bonne résistance à la corrosion et une bonne stabilité chimique pour garantir une stabilité de masse à long terme ;
- une susceptibilité magnétique de $+1,34 \times 10^{-3}$ plus faible que celle de l'acier inoxydable, mais un peu forte pour rendre négligeable les forces d'interaction avec des champs magnétiques environnants de l'ordre de 1 mT.

Parmi ces propriétés qui ont une influence sur la stabilité de masse, la masse volumique est particulièrement importante car elle détermine le volume et la surface minimale de l'artefact, ce qui a des conséquences en termes de correction de poussée de l'air lors de la mesure dans l'air et de correction de sorption lors de la mesure sous vide de la constante de Planck [12, 13].

3 Corrections et incertitudes

En 2014, le premier objectif pour la métrologie française était de valider le montage expérimental installé au LNE et de mesurer, au moyen de celui-ci, la constante de Planck dans l'air avec une incertitude type composée relative de l'ordre de 1×10^{-7} . Il fallait donc que la composante d'incertitude type due à la masse soit inférieure à 1×10^{-7} en valeur relative, c'est-à-dire inférieure à 50 μg en valeur absolue.

Dans les sous-sections suivantes, les différentes corrections et composantes d'incertitude pour l'étalon n°08 de 500 g utilisé en juillet 2014 par le LNE pour la première mesure de h dans l'air sont présentées.

3.1 Correction de masse

La masse volumique ρ_m à 20°C de l'étalon de masse n°08 de 500 g en Alacrite XSH déterminée au CNAM est de 9147,29 kg/m³ avec une incertitude type de 0,27 kg/m³.

Sa masse a été mesurée deux fois en 2014 au LNE avec une incertitude type de 16 µg. Les corrections de masse obtenues par rapport à la valeur nominale étaient les suivantes :

pour l'étalonnage effectué le 15 avril 2014 : -624 µg
pour l'étalonnage effectué le 25 avril 2014 : -625 µg

Il faut préciser que cet étalon avait été étalonné en 1987 au CNAM. La correction de masse obtenue à cette époque était de -651 µg associée à une incertitude type de 8 µg. Ainsi, sa masse aurait augmentée de 25 µg en 27 ans équivalente à une augmentation de masse d'environ 1 µg par an. On constate donc que la stabilité de cet étalon sans n'avoir subi aucune méthode de nettoyage est remarquable, elle est semblable à la stabilité moyenne à long terme des étalons en platine iridié. En conséquence, on admettra que la composante d'incertitude liée à la stabilité de masse sur la période de 4 mois d'avril à juillet 2014 est négligeable.

3.2 Correction de poussée de l'air

Dans l'expérience de la balance du watt dans l'air, la force gravitationnelle agissant sur le fléau de la balance est le poids apparent P_a dépendant évidemment de la masse apparente m_a :

$$P_a = m_a g = mg \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m} \right) \quad (6)$$

Le terme (ρ_a / ρ_m) est la correction relative de poussée de l'air. L'incertitude associée dépend donc des incertitudes de mesure des masses volumiques ρ_a and ρ_m .

ρ_m étant connue, il reste à déterminer la composante d'incertitude liée à ρ_a .

On détermine la masse volumique de l'air ρ_a par une méthode indirecte consistant à mesurer la pression p , la température t , l'humidité relative h_w et la fraction molaire dioxyde de carbone x_{CO_2} .

La masse volumique de l'air ρ_a est calculée à partir de la formule recommandée par la Commission Internationale des Poids et Mesures (CIPM) [14 - 16] :

$$\rho_a = \frac{p M_a}{RTZ} \left[1 - \frac{h_w p_{sw}(t) f(p, t) \left(1 - \frac{M_v}{M_a} \right)}{p} \right] \quad (7)$$

où T la température thermodynamique, M_a la masse molaire de l'air sec, M_v la masse molaire de l'eau, p_{sw} la pression de vapeur saturante de l'air humide dépendant de la température t , R la constante des gaz parfaits, f le facteur d'augmentation dépendant de la pression p et de la température t et Z le facteur de compressibilité.

Avec l'étalon n°08, la correction en masse de poussée de l'air est d'environ 66 mg.

Les incertitudes de mesure de la température, de la pression, de l'humidité relative et de la fraction molaire

de dioxyde de carbone sont, respectivement, 0,1 °C, 10 Pa, 0,015 et 2×10^{-4} .

La masse volumique de l'air est ainsi déterminée avec une incertitude type composée de $5,4 \times 10^{-4}$ kg m⁻³.

3.3 Correction d'interaction magnétique

La composante verticale F_z de la force d'interaction magnétique agissant sur un artefact fait d'un matériau ne présentant pas de moment magnétique, mais ayant une susceptibilité magnétique de volume χ non nulle, peut s'exprimer comme suit :

$$F_z = -(\chi - \chi_a) \cdot \frac{1}{\mu_0} \int_V B \frac{\partial B}{\partial z} \cdot dV \quad (8)$$

où χ_a est la susceptibilité magnétique de l'air, μ_0 la perméabilité du vide, V le volume de l'artefact considéré et B l'induction magnétique.

L'induction magnétique B a été mesurée expérimentalement dans l'expérience de la balance du watt le long d'un axe vertical autour de la position de l'étalon de masse.

Étant donné que la susceptibilité magnétique χ de l'Alacrite XSH vaut $+1,34 \times 10^{-3}$ et que sa surface de base S est de $12,6 \times 10^{-4}$ m², l'induction magnétique résiduelle génère une force verticale parasite de $3,7 \times 10^{-7}$ N sur l'étalon de masse. Une correction C_χ de 37 µg est donc appliquée sur la valeur de masse. L'incertitude type relative associée à cette correction est estimée à 30%, ce qui correspond à une incertitude type de 11 µg en valeur absolue.

3.4 Masse équivalente et incertitude composée

La force gravitationnelle F engendrée par la masse apparente m_a soumise à l'accélération de la pesanteur g et à la composante verticale de la force d'interaction magnétique F_z est donnée par :

$$F = P_a + F_z = m'_a g \quad (9)$$

avec
$$m'_a = m \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m} \right) + C_\chi \quad (10)$$

L'incertitude type composée associée à l'étalon de masse de 500 g en Alacrite XSH incluant sa traçabilité au prototype national du kilogramme, la contribution de la poussée de l'air comprenant celle de la masse volumique du matériau, ainsi que la force parasite due à la susceptibilité magnétique du matériau a pour expression :

$$u_{m'_a} = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m} \right)^2 u_m^2 + \left(\frac{m}{\rho_m} \right)^2 u_{\rho_a}^2 + \left(-\frac{m \rho_a}{\rho_m^2} \right)^2 u_{\rho_m}^2 + u_{C_\chi}^2} \quad (11)$$

Le tableau 1 donne les coefficients de sensibilité et les incertitudes types des grandeurs mesurées de l'expression (10).

Finalement, la composante d'incertitude type due à la masse pour la détermination dans l'air de la constante de Planck est de l'ordre de 36 µg, soit $7,2 \times 10^{-8}$ en valeur relative.

Tableau 1. Coefficients de sensibilité et incertitudes types des grandeurs mesurées pour un étalon de masse de 500 g en Alacrite XSH.

Grandeur mesurée	Incertitude type	Coefficient de sensibilité	Incertitude type en masse
m (étalonnage)	16 μg	1	16 μg
m (stabilité)	0	1	0
ρ_a	$5,4 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$	$5,5 \times 10^{-5} \text{ m}^3$	30 μg
ρ_m	0,27 kg/m^3	$-7,2 \times 10^{-9} \text{ m}^3$	2 μg
C_c	11 μg	1	11 μg

4 Conclusion

Cette analyse de la contribution en termes d'incertitude de l'étalon de masse utilisé pour l'expérience de la balance du watt installée au LNE montre que, dans le cas d'une mesure dans l'air, l'incertitude type est de $7,2 \times 10^{-8}$ en valeur relative, donc inférieure à 1×10^{-7} . On peut donc logiquement espérer pouvoir faire une mesure dans l'air de h avec une incertitude type relative de 1×10^{-7} . Néanmoins, compte tenu des composantes d'incertitude de mesure des autres grandeurs telles que les grandeurs électriques, il semble nécessaire de réduire autant que possible l'incertitude due à la masse.

On a montré que la principale correction est celle de la poussée de l'air (66 mg) associée à une incertitude type de l'ordre de 30 μg . La valeur élevée de cette incertitude est essentiellement due à l'incertitude sur la détermination de la masse volumique de l'air. Pour la réduire significativement, il faudrait améliorer plus particulièrement la mesure de température de l'air.

La seconde composante d'incertitude est celle due à l'étalonnage de la masse qu'il serait possible de réduire de moitié en utilisant un étalon de référence en platine iridié directement raccordé au prototype national du kilogramme.

L'incertitude sur la correction de force d'interaction magnétique ne peut être diminuée de manière significative pour l'Alacrite XSH.

C'est pourquoi l'utilisation d'un étalon de référence en platine iridié permettrait de diminuer significativement l'incertitude due à la masse. En effet, ses composantes d'incertitude d'étalonnage, de correction de poussée de l'air et de correction de force d'interaction magnétique seraient beaucoup plus faibles.

“This work was funded through the European Metrology Research Programme (EMRP) Project SIB03 kNOW. The EMRP is jointly funded by the EMRP participating countries within EURAMET and the European Union.”

Références

1. B P Kibble, *Atomic Masses and Fundamental Constants* (5th edn ed J H Sanders and A H Wapstra, New York: Plenum; (1976) pp 545–51.

2. A. Eichenberger, G. Genevès, P. Gournay, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **172** 363–83 (2009).

3. M Thomas, P Espel, D Ziane, P Pinot, P Juncar, F Pereira Dos Santos, S Merlet, F Piquemal, G Genevès, *Metrologia* **52** 433–443 (2015).

4. Aupetit C., Chaumont Y., Pinot P., *Actes des conférences du Congrès International de Métrologie* (2003).

5. Pinot P., *Metrologia*, 1997, **34**, 133-141.

6. Davidson S., *Metrologia* **47** (2010) 487–497.

7. Silvestri Z., Davis R. S., Genevès G., Gosset A., Madec T., Pinot P., Richard P., *Metrologia* **40** (2003) 172-176.

8. Davis R S, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **100** (1995) 209-25.

9. Davis R. S., “Errata”, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **109** (2004) pp. 303.

10. Meury P.-A., Huntz A. M., Molins R., Herbst-Ghysel M. and Sévèrac C., *Metrologia*, **44**, (2007) 253-265.

11. Davidson S., *Metrologia* **40** (2003) 324-338.

12. Beer W., Fasel W., Moll E., Richard P., Schneiter U., Thalmann R. and Egger J., *Metrologia*, **39** (2002) 263-268.

13. Picard A., Fang H., *Metrologia* **41** (2004) 333-339.

14. Davis R S., *Metrologia* **29** (1992) 67–70.

15. Picard A., Davis R. S., Gläser M. and Fujii K., *Metrologia* **45** (2008) 149–155.

16. Giacomo P., *Metrologia*, **18** (1982), 33-40.