16th International Congress of Metrology, 15012 (2013)
DOI: 10.1051/metrology/201315012

APPROCHE PROBABILISTE POUR LA PROPAGATION D'INCERTITUDES A TRAVERS UN MODELE DE CONSTANTE DE TEMPS THERMIQUE EN REGIMES DE CONVECTION NATURELLE ET FORCEE

Lambert Pierrat [1,a], Eric Georgin [2]

[1]CNRS-LJK- LAB, ProbStat Dept. & LJ-Consulting, Grenoble, 21 Allée Jean Wiener, 38400 Saint Martin d'Hères Cedex, France
[2]CETIAT, 25 Avenue des Arts, BP 52042, 69603 Villeurbanne Cedex, France

Abstract. The thermal time constant of a homogeneous body is a parameter currently used for studying the dynamic of heating and cooling processes. In case of natural or forced convection, its model structure is defined by the product of independent parameters affected by a specific dispersion. The thermal time constant uncertainty results from the propagation of parametric uncertainties through this model. We propose to estimate analytically this uncertainty by using parameter distributions adapted to the multiplicative structure of the model. The methodology is illustrated by a numerical application relative to the two previous convective processes.

Résumé. La constante de temps thermique d'un corps homogène est un paramètre couramment utilisé pour l'étude dynamique des processus d'échauffement et de refroidissement. Dans les cas de transferts par convection naturelle ou forcée, la structure de son modèle est définie par le produit de paramètres indépendants, affectés d'une dispersion spécifique. L'incertitude de la constante de temps thermique résulte de la propagation à travers ce modèle des incertitudes paramétriques. Nous proposons d'estimer analytiquement cette incertitude en utilisant des distributions paramétriques adaptées à la structure multiplicative du modèle. La méthodologie est illustrée par une application numérique concernant les deux cas de transfert convectif.

1 La constante de temps thermique

Soit un corps solide et homogène de volume (V), limité par une surface externe (S). Lorsque ce corps est immergé dans un fluide et subit une brusque variation de sa température, on peut sous certaines hypothèses, caractériser la cinétique de l'échange thermique qui en résulte, par une constante de temps thermique :

$$\bar{\tau} = \left(\frac{\rho \cdot C_p \cdot V}{h \cdot S} \right) \tag{1}$$

Cette relation peut être décrite comme étant le rapport entre l'énergie emmagasinée dans le corps [volume (V), masse volumique (ρ) et chaleur massique (C_p)] et la puissance dissipée dans le milieu fluide [coefficient d'échange thermique par convection (h), surface d'échange (S)]. La relation (1) peut s'écrire sous la forme d'un produit de trois termes :

$$\bar{\tau} = \left(\rho \cdot C_p\right) \cdot \left(\frac{1}{h}\right) \cdot \left(\frac{V}{S}\right) \tag{2}$$

Le premier terme est lié aux caractéristiques du matériau constitutif, le second au processus d'échange thermique, et le troisième à la géométrie du corps. Les hypothèses sur lesquelles s'appuie la définition de la constante de temps sont : l'homogénéité spatiale des caractéristiques du matériau et sa conductivité thermique élevée ainsi que la constance du coefficient d'échange résultant de la loi de Newton [1]. Les hypothèses de ce modèle sont valides si le système peut être caractérisé par un faible nombre de Biot (rapport entre la conductivité thermique interne et le coefficient d'échange) et par un champ de température uniforme au sein du solide immergé.

[a] Corresponding author: e_zainescu@yahoo.com

2 Formulation du modèle de transfert de chaleur convectif

Ce modèle, qui s'appuie sur un cas d'application réel (une ligne électrique parcourue par un courant), est celui d'un cylindre horizontal de diamètre ($D = 5cm$) et de longueur suffisamment grande pour qu'il puisse être considéré comme infini au plan des échanges thermiques. Ce cylindre en cuivre est le siège d'un échauffement par effet Joule et le flux de chaleur correspondant se dissipe dans l'air ambiant à la pression atmosphérique et à une température de référence de 27°C ($T_{ar} = 300K$). Ce solide isotherme s'échauffe et l'on considère que le sa température initiale s'identifie à sa température de paroi (T_p), supérieure à celle du fluide, telle que ($\Delta T = T_p - T_{ar} = 10K$).

La relation (1) montre que la constante de temps thermique est notamment conditionnée par le coefficient d'échange thermique (h), lui-même fonction du nombre adimensionnel de Nusselt, défini ci-après. Le régime d'écoulement autour du corps considéré (turbulent, laminaire ou mixte), sa forme géométrique (plaque, cylindre, sphère, parallélépipède) et son orientation spatiale dans le trièdre de référence (horizontale, verticale, inclinée), influencent le nombre de Nusselt par l'intermédiaire du nombre de Reynolds.

2.1 Cas de la convection forcée

Le cylindre ($D = 5cm$) est placé horizontalement dans un écoulement d'air transversal à son axe, de vitesse ($U_a = 5{,}0 m/s$). L'analyse du nombre adimensionnel de Reynolds, égal au rapport entre les forces d'inertie et de viscosité du fluide permet de déterminer le régime d'écoulement (laminaire, mixte ou turbulent) :

$$\mathrm{Re} = \left(\frac{U_a \cdot D}{\nu} \right) \tag{3}$$

Dans cette expression intervient la viscosité dynamique de l'air (ν) à la température de référence (T_{ar}).

Le transfert de chaleur par convection est analysé au moyen du nombre adimensionnel de Nusselt :

$$Nu = \left(\frac{h_{CF} \cdot D}{k} \right) \tag{4}$$

Dans cette expression interviennent le coefficient d'échange (h_{CF}) ainsi que la conductivité thermique de l'air (k) à la température de référence (T_{ar}).

D'après [2], compte tenu du régime d'écoulement déterminé par une valeur suffisamment élevée du nombre de Reynolds, le nombre de Nusselt peut être obtenu à partir d'une formule de corrélation expérimentale :

$$Nu_{CF} \approx C_f \cdot \mathrm{Re}^{n_f} \tag{5}$$

dans laquelle : $C_f \approx 0{,}22 \; et \; n_f \approx 0{,}6$.

A partir des relations (3, 4, 5), on obtient le coefficient d'échange sous la forme explicite:

$$h_{CF} = kC_f D^{n_f - 1} (U_a / \nu)^{n_f} \tag{6}$$

Le terme géométrique étant proportionnel à la dimension caractéristique, soit ici ($V/S = D/4$), la constante de temps thermique peut s'écrire finalement à partir de la relation (1) :

$$\overline{\tau}_{CF} = \left(\frac{\rho \cdot C_p}{4kC_f} \right) \cdot \left(D^{2-n_f} \right) \cdot \left(\frac{\nu}{U_a} \right)^{n_f} \tag{7}$$

Les valeurs de référence assignées aux différents paramètres [3], sont récapitulées dans le tableau 1 et les résultats de l'application numérique dans le tableau 2 ci-après.

Noter que la nature du régime de convection forcée est justifiée d'après [4], par un éloignement suffisant du régime de convection mixte, fonction des nombres de Reynolds et de Grashof.

Tableau 1. Paramètres de référence et sensibilités.

P_i	ρ	C_p	$(\rho \cdot C_p)$
unités	kg/m^3	$J/kg.K$	$J/m^3.K$
P_{i0}	$8{,}94.10^3$	$0{,}385.10^3$	$3{,}442.10^6$
p_i	≈ 0	$\approx (1/9)$	$\approx (1/9)$
P_i	k	ν	β
unités	$W/m.K$	m^2/s	K^{-1}
P_{i0}	$2{,}624.10^{-2}$	$1{,}568.10^{-5}$	$3{,}33.10^{-3}$
p_i	$\approx (8/9)$	$\approx (7/4)$	$\approx -(1/1)$

2.2 Cas de la de convection naturelle

Le cylindre est plongé dans un air calme. Compte tenu de la différence de température imposée entre le fluide et le cylindre, la convection naturelle induit un écoulement autour du cylindre. Pour un écart de température ($\Delta T = 10K$) et une faible vitesse d'écoulement du à la turbulence résiduelle (typiquement $U_a = 0{,}03 m/s$), ceci correspond à un régime laminaire caractérisé par un faible nombre de Reynolds [2]. Par rapport au cas précédent, dans une formule de corrélation analogue à (5), on doit substituer au nombre de Reynolds, le nombre de Rayleigh égal au produit des nombres de Grashof et de Prandtl. Le nombre adimensionnel de Grashof, qui détermine le mécanisme de convection naturelle, est défini comme le rapport entre force ascensionnelle et force de viscosité :

$$Gr = \left(\frac{g \cdot \beta}{\nu^2}\right) \cdot (\Delta T) \cdot (D^3) \tag{8}$$

Dans cette expression apparaissent, l'accélération de la pesanteur (g), le coefficient de dilation volumique (β), et la viscosité cinématique (ν) de l'air à la température et à la pression considérées. Outre la dimension caractéristique (D), intervient l'écart de température (ΔT) entre la paroi et l'air ambiant.
Le nombre adimensionnel de Prandtl, qui s'identifie au rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement (ν) et la diffusivité thermique (α), traduit l'influence de la couche limite au voisinage de la paroi:

$$Pr = \left(\frac{\nu}{\alpha}\right) = \left(\frac{\rho \cdot C_p \cdot \nu}{k}\right) \tag{9}$$

Pour l'air, assimilable à un gaz parfait, le nombre de Prandtl est pratiquement constant (à 1,5 % près) entre 0°C et 100°C, soit ($\mathrm{Pr} \approx 0{,}708$).
Pour un gaz tel que l'air, le nombre de Nusselt est défini par la formule de corrélation suivante, analogue à (5) :

$$Nu_{CN} \approx C_n \cdot (Gr \cdot \mathrm{Pr})^{n_n} \tag{10}$$

dans laquelle : $C_n \approx 0{,}50 \; et \; n_n \approx 0{,}25$.
Comme dans le cas précédent, le coefficient d'échange (h_{CN}) et la constante de temps ($\bar{\tau}_{CN}$) s'écrivent :

$$h_{CN} = kC_n D^{3n_n - 1} \cdot \left(\frac{\beta \cdot g \cdot \mathrm{Pr} \cdot \Delta T}{\nu^2}\right)^{n_n} \tag{11}$$

$$\bar{\tau}_{CN} = \left(\frac{\rho \cdot C_p}{4kC_n}\right) \cdot \left(D^{2-3n_n}\right) \cdot \left(\frac{\nu^2}{\beta \cdot g \cdot \mathrm{Pr} . \Delta T}\right)^{n_n} \tag{12}$$

Les valeurs de référence assignées aux différents paramètres sont récapitulées dans le tableau 1 et les résultats de l'application numérique dans le tableau 2 ci-après.
Noter que la nature du régime de convection naturelle est justifiée d'après [5], par un éloignement suffisant du régime de convection mixte, fonction des nombres de Reynolds et de Grashof.

Tableau 2. Résultats comparatifs (CF & CN).

CF & CN	Re (SD)	Gr (SD)	Nu (SD)	h W/m^2K	$\bar{\tau}$ (s)
CF	15944	166125	73,11	38,4	1 121
CN	95,66	166125	9,26	4,86	8 855

3 Influence des paramètres physiques

3.1 Influence de la température

Tous les paramètres thermophysiques de l'air évoluent de façon non linéaire avec sa température [3]. Une formulation réduite est envisageable si l'on exprime sa température (T_a) par rapport à la température thermodynamique de référence (T_{ar}). Dans une plage comprise entre 0°C et 150°C, qui excède largement celle qui correspond à l'échauffement d'une ligne électrique, nous avons adopté pour les paramètres thermophysiques la forme d'une fonction puissance :

$$P_i \approx P_{i0} \cdot \left(\frac{T_a}{T_{ar}}\right)^{p_i} \tag{13}$$

Les valeurs de référence étant définies à la température de 27 °C ($T_{ar} = 300K$).
Les constantes (P_{i0}) et les exposants (p_i), identifiés d'après (13), sont regroupés dans le tableau 1 précédent.

3.2 Cas de la convection forcée

En introduisant dans (7) les paramètres qui dépendent de la température et en regroupant les termes constants d'indice (r), on obtient la relation suivante :

$$\bar{\tau}_{CF} = \left[\frac{\rho_r \cdot C_{pr}}{4 \cdot C_{fr} \cdot k_r}\right] (D_r)^{2-n_f} \left(\frac{\nu_r}{U_{ar}}\right)^{n_f} \left(\frac{T_a}{T_{ar}}\right)^{N_{CF}} \tag{14}$$

A partir de la formulation réduite proposée en (13) et de l'exposant ($n_f = 0{,}6$) intervenant dans la relation (5), on trouve $N_{CF} \approx 3/11 \approx (0{,}272)$, ce qui signifie qu'en régime de convection forcée, la constante de temps augmente non linéairement avec la température de l'air ambiant.

3.3 Cas de la convection naturelle

En suivant la même démarche que ci-dessus, (12) débouche sur une relation analogue à (14) :

$$\bar{\tau}_{CN} = \left[\frac{\rho_r \cdot C_{pr}}{4 \cdot C_{nr} \cdot k_r}\right] \cdot (g \cdot \mathrm{Pr} \cdot \Delta T)^{-n_n} \cdot \ldots$$

$$\ldots \; (D_r)^{2-3n_n} \cdot \left(\frac{\nu_r}{\sqrt{\beta_r}}\right)^{2n_n} \cdot \left(\frac{T_a}{T_{ar}}\right)^{N_{CN}} \tag{15}$$

D'après (10), en convection naturelle ($n_n = 0.25$), d'où l'exposant de la température : $N_{CN} \approx 17/49 \approx 0{,}347$

La constante de temps augmente également de façon non linéaire avec la température du fluide, mais plus rapidement que dans le cas de la convection forcée.

3.4 Formulations réduites

A partir des expressions (7,12), on constate que l'incertitude globale susceptible d'affecter les constantes de temps résulte de la propagation d'incertitudes élémentaires mutuellement indépendantes et de natures différentes. Il s'agit des incertitudes affectant les caractéristiques physiques ($\rho \cdot C_p$) et géométriques (D) du corps solide, des caractéristiques thermophysiques de l'air (k, ν, β), des caractéristiques aérodynamiques en convection forcée (U_a) et des coefficients (C_f, C_n) entrant dans les relations de corrélations qui définissent les nombres de Nusselt. Nous supposons que les exposants (n_f, n_n) sont des constantes, cette hypothèse impliquant que les corrélations proposée en (5,10) sont exactes. En fait ceci n'est pas rigoureusement vérifié puisque les corrélations entre nombres caractéristiques sont à la fois des approximations simples d'une réalité complexe et qu'elles sont elles-mêmes affectées d'incertitudes expérimentales. Néanmoins, les exposants (n_f, n_n) sont suffisamment fondés, ce qui permet de négliger leur dispersion devant celle des coefficients (C_f, C_n). Dans le cadre des exemples, nous ferons l'hypothèse que la dispersion affectant les constantes de temps résulte uniquement d'une maîtrise imparfaite des conditions expérimentales, liées à des paramètres mutuellement indépendants, d'une part fonctionnels : température de l'air (T_a) et vitesse du courant transversal (U_a), d'autre part structurels : coefficients (C_f, C_n) entrant dans les relations de corrélations proposées et dimension caractéristique (D). On peut alors modifier la présentation des relations (14,15) en isolant ces paramètres, et en définissant leurs valeurs réduites par rapport à leurs valeurs de référence, c'est à dire en posant :

$$\vartheta = (\tau/\bar{\tau}), \qquad t = (T_a/T_{ar}), \qquad u_a = (U_a/U_{ar}),$$
$$c_f = (C_f/C_{fr}),\ c_n = (C_n/C_{nr}),\ d = (D/D_r)$$

Ce qui donne, en convection forcée d'après (14):

$$\vartheta_{CF}(t,u,c_f,d) = \left[\frac{(d)^{2-n_f} \cdot (t)^{N_{CF}}}{(c_f)\cdot(u_a)^n}\right] \tag{16}$$

Et en convection naturelle d'après (15):

$$\vartheta_{CN}(t,c_n,d) = \left[\frac{(d)^{2-3n_n} \cdot (t)^{N_{CN}}}{(c_n)}\right] \tag{17}$$

Ainsi qu'on le verra plus loin, cette formulation permet de se libérer de la valeur moyenne des constantes de temps et d'accéder directement aux incertitudes relatives correspondantes.

4 Analyse probabiliste des incertitudes

4.1 Limites de l'approximation des moments

En matière de propagation d'incertitudes, sauf à envisager des simulations numériques (méthode de Monte-Carlo par exemple), les méthodes analytiques en vigueur [7] reposent sur des développements généralement limités aux termes du second ordre. Leur principe général est basé sur la propagation à travers une fonction déterministe $y = f(x)$, des moments d'une variable aléatoire (x), en vue d'obtenir les moments de la variable aléatoire transformée (y). D'une part, il est utile de rappeler que cette approche, applicable lorsque la fonction $y = f(x)$ est linéaire, devient de plus en plus imprécise lorsque la non linéarité augmente. D'autre part, un développement en série de Taylor limité aux deux premiers moments (moyenne et variance) de la distribution de la variable (x) suppose implicitement que les incertitudes affectant la variable (x) et la variable résultante (y) sont distribuées suivant des lois de probabilité normale. Or la symétrie de cette loi ne correspond pas toujours aux distributions des incertitudes réelles. L'utilisation de cette approche est valide si les incertitudes élémentaires des variables composant le modèle sont faibles en valeur relative, ce qui est fréquemment le cas dans le domaine de la métrologie. Par contre, dans le domaine industriel, on est souvent confronté à des incertitudes d'un ordre de grandeur plus important et les limites de validité de cette approche peuvent être atteintes. Une approche alternative est proposée ci-après.

4.2 Distribution des incertitudes

L'examen des relations (16,17) montre que leurs paramètres sont combinés sous forme de produits, de quotients et de fonctions puissance. Or un tel modèle est difficilement compatible avec une approximation basée sur une loi de distribution normale, car cette dernière ne se reproduit sans altération que de manière additive. Par contre, si l'on admet que les incertitudes sont distribuées suivant des lois log-normale, leur propriété de reproduction multiplicative permet d'obtenir assez simplement une solution analytique exacte du problème, l'incertitude résultante étant elle-même log-normale [8]. La notation $LN(\mu,\sigma)$ signifie que la loi log-normale est définie par la transformation exponentielle de la loi normale parente, notée $N(\mu,\sigma)$, de moyenne et écart-type (μ,σ). Cette transformation présente l'avantage de définir la variable sur un intervalle $[0,+\infty[$, physiquement plus acceptable que l'intervalle $]-\infty,+\infty[$

sur lequel s'appuie la loi normale [9]. L'assimilation d'une incertitude élémentaire à une distribution log-normale implique d'en définir les paramètres (μ, σ) en fonction d'une moyenne (m) et d'un coefficient de variation (cv), ce dernier étant une mesure de dispersion relative. La méthode d'identification statistique des moments (égalité des moments théoriques et empiriques) permet de réaliser l'identification de ces deux paramètres (μ, σ) à partir des caractéristiques imposées (m, cv). Compte tenu des propriétés de la loi log-normale, on a développé les relations suivantes ainsi que leurs approximations :

$$\mu = Ln\left(m \Big/ \sqrt{1+(cv)^2} \right) \approx Ln(m) - (cv)^2/2 \quad (18)$$

$$\sigma = \left\{ Ln\left[1+(cv)^2\right] \right\}^{1/2} \approx (cv) \quad (19)$$

Ces approximations, issues d'un développement limité au premier ordre du coefficient de variation, assurent la cohérence des relations exactes, en particulier la condition de fermeture ($m = 1$) qui résulte de l'introduction des valeurs relatives dans les relations (16,17). Les valeurs exactes de (μ, σ) sont majorées en valeurs absolues par les termes quadratiques suivants :

$$\varepsilon(\mu) \leq (1/2) \cdot (cv)^2 \quad (20)$$

$$\varepsilon(\sigma) \leq (1/4) \cdot (cv)^2 \quad (21)$$

Pratiquement, les erreurs relatives maximales affectant les paramètres (μ, σ) seront respectivement inférieures à (1% - 0,5%) pour (15 %), ceci ayant pour effet de majorer de façon négligeable l'estimation de l'incertitude globale affectant la constante de temps. Noter que ces approximations n'affectent pas les propriétés multiplicatives intrinsèques du modèle log-normal, contrairement à celles adoptées pour le modèle normal, dont la propriété de reproduction additive est inadaptée à des combinaisons multiplicatives de variables aléatoires.

4.3 Propagation des incertitudes

L'introduction dans (16,17) des incertitudes paramétriques distribuées suivant des lois log-normale $LN(\mu_i, \sigma_i)$, conduit à une incertitude globale, elle même distribuée suivant une telle loi notée : $LN(\mu_\tau, \sigma_\tau)$ dont les paramètres sont exprimés en fonction des (μ_i, σ_i).

Pour le régime de convection forcée, d'après (16) :

$$\begin{aligned} \mu(\tau_{CF}) &= (2 - n_f) \cdot \mu_d + \cdots \\ &\cdots + N_{CF} \cdot \mu_t - \mu_c - n_f \cdot \mu_u \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau_{CF}) &= \left[(2 - n_f) \cdot \sigma_d\right]^2 + \cdots \\ &\cdots + \left[N_{CF} \cdot \sigma_t\right]^2 + \left[\sigma_c\right]^2 + \left[n_f \cdot \sigma_u\right]^2 \end{aligned} \quad (22b)$$

Pour le régime de convection naturelle, d'après (17) :

$$\begin{aligned} \mu(\tau_{CN}) &= (2 - 3n_n) \cdot \mu_d + \cdots \\ &\cdots + N_{CN} \cdot \mu_t - \mu_c \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau_{CN}) &= \left[(2 - 3n_n) \cdot \sigma_d\right]^2 + \cdots \\ &\cdots + \left[N_{CN} \cdot \sigma_t\right]^2 + \left[\sigma_c\right]^2 \end{aligned} \quad (23b)$$

On notera que les expressions concernant les paramètres (μ) pourraient être obtenues en considérant un développement limité au premier ordre du logarithme des incertitudes relatives, approche simple proposée antérieurement dans un autre contexte [10], mais plus difficilement utilisable pour les paramètres (σ). A partir des paramètres ci-dessus, il est possible de déterminer toutes les caractéristiques statistiques des lois log-normale (moyenne, médiane, mode, écart-type, coefficient de variation, coefficient d'asymétrie…). Par souci de cohérence avec la pratique habituelle, les notions d'incertitude relative et de coefficient de variation sont considérées comme équivalentes.

5 Exemples d'applications

5.1 Incertitudes élémentaires

Dans le contexte industriel, les dispersions paramétriques sont souvent exprimées par des coefficients de variation associés à des intervalles physiquement bornés. Compte tenu de leur ordre de grandeur, les méthodes utilisées pour transformer ces dispersions en incertitudes métrologiques conventionnelles peuvent conduire à des écarts difficilement quantifiables. En effet, ce processus implique trois étapes successives : tout d'abord l'estimation de l'écart - type correspondant à une distribution quelconque définie par son coefficient de variation, ensuite sa propagation à travers le modèle, enfin l'application à l'écart - type résultant, d'un facteur d'élargissement égal à 2 (approximation de la valeur théorique du quantile 1.96, qui correspond à la borne unilatérale de la loi normale, définie par une probabilité de dépassement égale à 2,5 %). Tout ceci consiste à ramener une distribution originelle, généralement asymétrique et bornée, à une distribution normale symétrique et non bornée, supposée « équivalente ». Dans ces conditions, comme indiqué plus haut, la méthode analytique de propagation des variances [7] présente une limitation intrinsèque, car une équivalence basée sur l'égalité des variances ne contient pas toute la quantité d'information représentative de la distribution originelle (sauf si celle-ci est elle-même normale). En outre, compte tenu de la complexité algébrique liée au processus de propagation à travers un modèle défini par des produits, quotients et puissances de variables aléatoires, ces

opérations successives ne sont pas rigoureusement compatibles avec la propriété de reproduction additive de la loi normale. Le domaine de validité des résultats ainsi obtenus, essentiellement fonction de l'importance des incertitudes relatives, est difficile à cerner précisément.
On a regroupé dans le tableau 3 les incertitudes paramétriques définies par des intervalles bornés, retenues dans le cadre des exemples d'application.

Tableau 3. Incertitudes paramétriques.

PARAMETRE	**DIAMETRE**	**CORRELATION**
Valeur réduite	d	c (CF-CN)
Référence	5 cm	0,22 - 0.50
Dispersion expérimentale	±2,5 mm 5 %	±0,0132 - ±0,05 ±6 % - ±10 %
Coefficient de variation	2,887 %	3,464 % - 5,774 %
Commentaires	(*)	(**)
PARAMETRE	**VITESSE**	**TEMPERATURE**
Valeur réduite	u	t
Référence	5 m/s	300 K (27°C)
Dispersion expérimentale	±0.4 m/s ±8 %	±18 °C ±6 %
Coefficient de variation	4,619 %	3,464 %
Commentaires	(***)	(****)

(*) Si la géométrie est quelconque, la dispersion de la dimension caractéristique (V/S) peut être plus importante,
(**) Les corrélations entre nombres adimensionnels, issues d'expériences basées sur des relations expérimentales, font l'objet de dispersions notables, en particulier en régime de convection naturelle,
(***) En régime aérodynamique, cette dispersion peut être induite par la turbulence,
(****) Dispersion exprimée dans l'échelle thermodynamique, utilisée pour l'analyse de sensibilité à la température ;
Les valeurs retenues sont spécifiques des exemples considérés, les dispersions des variables structurelles (géométrie, coefficients de corrélation) et fonctionnelles (vitesse et température) pouvant être fort différentes dans d'autres contextes. Afin d'exacerber leur influence, la température et la vitesse ont été volontairement affectées de dispersions importantes correspondant à l'environnement climatique d'une ligne électrique [2]. Les dispersions affectant les coefficients des formules de corrélation sont assez réalistes si l'on considère les inévitables fluctuations intervenant en mécanique des fluides et la profusion des formules existantes. En ce qui concerne la dimension caractéristique, sa dispersion pourrait être plus importante dans le cas d'une géométrie moins idéale que celle du cylindre infini (effets d'extrémités, singularités locales, …). En effet, d'après (2), il s'agit du rapport (volume/surface), ces deux grandeurs pouvant être plus incertaines, voire partiellement corrélées. Toutes les distributions paramétriques étant supposées uniformes, leur équiprobabilité sur un intervalle $[X_1, X_2]$ correspond à une hypothèse d'entropie maximale, donc d'information minimale [11]. Une incertitude relative peut donc être définie par le coefficient de variation de la loi uniforme, soit :

$$cv = \left(1/\sqrt{3}\right)\cdot\left[(X_2 - X_1)/(X_1 + X_2)\right] \qquad (24)$$

5.2 Analyse statistique des résultats

La méthode proposée a été appliquée à l'estimation de l'incertitude relative affectant chacune des constantes de temps thermiques, en fonction des incertitudes élémentaires indiquées dans le tableau 3. On a regroupé dans le tableau 4 les caractéristiques statistiques de ces incertitudes distribuées suivant des lois log-normale : logarithme de la médiane $\mu(\tau)$, écart-type $\sigma(\tau)$, moyenne $m(\tau)$, coefficient de variation $CV(\tau)$ et coefficient d'asymétrie $SK(\tau)$.

Tableau 4. Caractéristiques statistiques.

$LN(\mu,\sigma)$	$\mu(\tau)$	$\sigma(\tau)$	$m(\tau)$
CF	$4{,}935.10^{-4}$	0,06075	1,00234
CN	$9{,}376.10^{-4}$	0,06914	1,00333
Définition statistique	*Ln*(médiane) Loi LN	Ecart-type Loi LN	Moyenne Loi LN
$LN(\mu,\sigma)$	$cv(\tau)$	$SK(\tau)$	$\varepsilon(\tau)$
CF	6,080%	+ 0,183	**23,9%**
CN	6,922%	+ 0,208	**27,2%**
Définition statistique	cv Loi LN	Asymétrie Loi LN	Intervalle bilatéral à 95%

La valeur moyenne a pour expression :

$$m(\tau) = \exp\left(\mu_\tau + \sigma_\tau^2/2\right) \qquad (25)$$

Par suite de la faiblesse des paramètres $\mu(\tau)$ et $\sigma(\tau)$, la valeur moyenne est pratiquement unitaire, très proche des valeurs médiane et modale. En effet, la valeur médiane est encadrée par les valeurs moyenne et modale et l'écart entre ces deux bornes est négligeable, de l'ordre de $(3/2)\cdot\sigma^2$. Ceci résulte de la forme standardisée des relations (16,17) et des ordres de grandeur qui, d'après (18,19), sont fixés par le coefficient de variation (cv).
Dans ces conditions, l'incertitude relative $\varepsilon(\tau)$ s'identifie au coefficient de variation $cv(\tau)$, lequel est d'après (19), assimilable à $\sigma(\tau)$, puisque :

$$\varepsilon(\tau) \equiv cv(\tau) = \sqrt{\exp\left(\sigma_\tau^2\right) - 1} \approx \sigma(\tau) \qquad (26)$$

Le coefficient d'asymétrie $SK(\tau)$ dépend du coefficient de variation :

$$SK(\tau) = 3\cdot cv(\tau) + cv^3(\tau) \approx 3\cdot cv(\tau) \qquad (27)$$

Il est donc légèrement positif, ce qui signifie qu'en probabilité, les valeurs maximales des incertitudes sont plus fréquentes que les valeurs minimales. Par rapport à la loi normale parfaitement symétrique ($SK \equiv 0$), les intervalles de confiance bilatéraux sont eux-mêmes asymétriques. Ainsi pour des quantiles d'ordre (q) :

$$\varepsilon_q(\tau) = \exp\{\mu(\tau) + t_q \cdot \sigma(\tau)\} \qquad (28)$$

On peut se ramener à la définition conventionnelle de l'incertitude élargie [7] en notant qu'une borne de confiance unilatérale correspond à une probabilité de dépassement ($q = 2{,}5\%$), donc au quantile ($t_q = 1{,}96$) de la loi normale :

$$\varepsilon_{2,5\%}(\tau) = \exp\{\mu(\tau)\} \cdot sh[1{,}96\sigma(\tau)] \approx 1{,}96\sigma(\tau) \qquad (29)$$

D'où, finalement, les incertitudes relatives $\varepsilon(\tau)$ affectant les constantes de temps autour de leur valeur moyenne :

$\bar{\tau}_{CF} \approx$ 1 121 s et $\varepsilon(\tau_{CF}) \approx$ 11,95 %

$\bar{\tau}_{CN} \approx$ 8 855 s et $\varepsilon(\tau_{CN}) \approx$ 13,60 %

Les constantes de temps étant fonction de nombreux paramètres, le processus de propagation conduit à des incertitudes finales ayant des ordres de grandeur significatifs. Même dans les cas les plus favorables (conditions de laboratoire), il semble difficile d'atteindre des valeurs qui seraient compatibles avec l'utilisation d'une méthode d'estimation basée sur la propagation de faibles incertitudes élémentaires assimilables à des lois normale. Dans les relations (22b, 23b), compte tenu du poids relatif des incertitudes liées à la température, le fait de les négliger conduirait à minorer faiblement les résultats précédents (respectivement :- 0,294 % et - 0,412 %). Dans ces cas d'application, c'est la conséquence des mécanismes de compensation qui interviennent dans les relations de définition des échanges thermiques. Mais ceci ne signifie pas qu'il serait justifié de négliger systématiquement l'influence de la température, en particulier lorsque les autres incertitudes paramétriques sont faibles (par exemple dans le cas de mesures réalisées en laboratoire).

5 Conclusions

Bien que la notion de constante de temps thermique soit rattachée à l'hypothèse du corps homogène, on peut l'utiliser utilement dans de nombreuses applications. Soit en tant que telle (par exemple pour définir une évolution transitoire de température), soit comme estimation prévisionnelle de la durée d'un processus d'échauffement ou de refroidissement (par exemple pour définir la mise en régime ou l'extinction d'un processus thermique). Les modèles qui définissent les constantes de temps en régimes convectifs, découlent de corrélations provenant de la mécanique des fluides, basées sur l'utilisation des nombres adimensionnels. La structure algébrique de ces modèles, issue des méthodes de similitude, se ramène généralement à des produits, quotients et puissances de leurs variables constitutives. Pour diverses raisons, la propagation des incertitudes paramétriques à travers ce type de modèle n'est pas compatible avec la méthode analytique de propagation des variances basée sur la loi normale. Par contre, si les incertitudes paramétriques sont distribuées suivant des lois log-normale, la mise en œuvre du processus analytique est beaucoup plus simple et conduit à des résultats exacts. Dans le cadre des applications visant à montrer l'intérêt de cette approche, on a utilisé une méthode de standardisation des modèles permettant de tenir compte de la sensibilité des paramètres thermophysiques à la température. La méthode proposée est potentiellement utilisable pour l'estimation des incertitudes d'un coefficient d'échange ou dans d'autres contextes d'applications qui relèvent de modèles ayant une structure analogue.

Références

1. W.M. Rohsenow, J.P. Hartnett, Handbook of Heat Transfer, Mc-Graw-Hill, 1973
2. V.T. Morgan, “The overall convective heat transfer from smooth circular cylinder”, Advances in Heat Transfer, 11, 199-263, 1975
3. Y.S. Touloukian & al., Thermophysical Properties of Matter, TPRC Data Series, IFI/ Plenum, New York, 1970-1978
4. W.M. Kays, W.B. Nicoll, “Laminar heat transfer to a gas with large temperature differences”, ASME J. Heat Transfer, 85, 329-338, 1963
5. J. Gosse, “Etude de la convection par les fils aux faibles nombres de Reynolds”, Publ. Sc. Tech. Min. Air, Tech. Note 322, 1956
6. R.M. Fand, K.K. Keswani, “Combined natural and forced convectionheat transfer from horizontal cylinders to water”, Int. J. Heat Mass Transfer, 16, 1175-1191, 1973
7. BIPM, Evaluation of measurement data : Guide to the expression of uncertainty in measurement, JCGM 100 :2008, French version, BIPM, sept. 2008
8. L. Pierrat, “ Propagation des incertitudes dans les relations de similitude multiplicatives”, Internal Report, LJ-Consulting, 2011 (à publier dans la revue Essais & Simulations, 2013)
9. J. Aitchison, J.A.C. Brown, The Lognormal Distribution, Cambridge University Press, 1957
10. L. Pierrat, « La propagation des incertitudes à travers un modèle de recalage : une approche probabiliste simplifiée », Actes des Conférences , Congrès International de Métrologie, Lyon ,Septembre 1991
11. A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, Mc-Graw-Hill International Editions, 2nd Edition, 1984